Correction du DST n°3

Exercice 1

1. La fonction ln est définie sur $]0,+\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \in \mathcal{D}_f \iff 1-\mathrm{e}^{-x^2} > 0 \iff \mathrm{e}^{-x^2} < 1 \iff x^2 > 0$
On en conclut que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $-x \in \mathbb{R}^*$, et $f(-x) = -x \ln\left(1-\mathrm{e}^{-(-x)^2}\right) = -x\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.
3. (a) Sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$ on a $1-\mathrm{e}^{-x^2} > 0$.
De plus, $x \mapsto 1-\mathrm{e}^{-x^2}$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Ainsi, $x \mapsto \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables car ln est dérivables sur $]0,+\infty[$.
Finalement f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right) + x\frac{-(-2x\,\mathrm{e}^{-x^2})}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} \\ &= \ln\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right) + \frac{2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} \\ &= \frac{2x^2\,\mathrm{e}^{-x^2} + \left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)\ln\left(1-\mathrm{e}^{-x^2}\right)}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x^2 \leq 0$ donc $0 \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$, et ainsi $1-\mathrm{e}^{-x^2} \in [0,1[$.
De plus, $\mathrm{e}^{-x^2} = 1-u$ donc $-x^2 = \ln(1-u)$, $x^2 = -\ln(1-u)$. On a donc

$$f'(x) = \frac{-2\ln(1-u)(1-u) + u\ln u}{u}$$

(c) Pour tout $u \in [0,1[$ on a $1-u \in]0,1]$, donc g est dérivable comme composition de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall u \in [0,1[, \quad g'(u) &= -2\times(-1)\times\ln(1-u) - 2\frac{-(1-u)}{1-u} + \ln u + u \times \frac{1}{u} \\ &= 2\ln(1-u) + \ln(u) + 3 \\ &= \ln((1-u)^2) + \ln(u) + 3 \\ &= \ln(u(1-u)^2) + 3 \end{aligned}$$

(d) On étudie les variations de la fonction $\varphi : u \mapsto u(1-u)^2$ sur $[0,1]$. On a $\varphi(u) = u(1-2u+u^2) = u^3-2u^2+u$

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= 3u^2 - 4u + 1 \\ &= (u-1)(3u-1) \end{aligned}$$

on en déduit le tableau de variation de φ :

u	0		$\frac{1}{3}$		1
$\varphi'(u)$		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$	$\searrow$	0

$$\text{Or } \varphi\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}. \text{ On a}$$

$$\frac{4}{27} > \frac{3}{27} \geq \frac{1}{9} > \frac{1}{10} \geq 0,1 > \mathrm{e}^{-3}$$

d'après l'indication de l'énoncé. Ainsi, $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) > \mathrm{e}^{-3} > 0$.

Comme φ est continue comme fonction polynôme et strictement croissante sur $[0, \dfrac{1}{3}]$ et strictement décroissante sur $[\dfrac{1}{3}, 1]$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta < 1$ solutions de l'équation $u(1-u)^2 = \mathrm{e}^{-3}$.

On a $g'(u) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(u(1-u)^2) \geq -3 \Longleftrightarrow u(1-u)^2 \geq \mathrm{e}^{-3}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- En 0, on a $\lim\limits_{u \to 0} u \ln u = 0$ par croissance comparée, donc par opérations et compositions de limites on a $\lim\limits_{u \to 0} g(u) = 0$
- De même, en 1, on a $\lim\limits_{u \to 1} (1-u) = 0$ donc par composition de limites et par croissance comparée, $\lim\limits_{u \to 1} (1-u)\ln(1-u) = 0$. De plus, $\lim\limits_{u \to 1} u \ln u = 0$ par opérations usuelles. Ainsi, $\lim\limits_{u \to 1} g(u) = 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

u	0		α		β		1
$g'(u)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(u)$	0	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(\beta)$	$\searrow$	0

(e) D'après le tableau de variations précédent, on a $g(x) < 0$ sur $[0, \alpha]$ et $g(x) > 0$ sur $[\beta, 1]$.
De plus, $0 \in [g(\alpha)\ ;\ g(\beta)]$ et g est continue et strictement croissante sur $]\alpha\ ;\ \beta[$. Il existe donc un unique réel $\gamma \in]\alpha; \beta[$ tel que $g(\gamma) = 0$, et d'après le tableau de variation de la question précédente on a bien $g(u) \leq 0 \Longleftrightarrow u \in]0, \gamma]$ et $g(u) \geq 0 \Longleftrightarrow u \in [\gamma, 1[$.

(f) D'après la question 2.b, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $f'(x) = \dfrac{g(u)}{u}$ avec $u = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$.
On a $u \in [0, 1]$ donc $u \geq 0$, le dénominateur est positif.
D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
g(u) \geq 0 &\Longleftrightarrow u \geq \gamma \\
&\Longleftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-x^2} \geq \gamma \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1 - \gamma \\
&\Longleftrightarrow -x^2 \leq \ln(1-\gamma) \\
&\Longleftrightarrow x^2 \geq -\ln(1-\gamma) \\
&\Longleftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{-\ln(1-\gamma)}] \cup [\sqrt{-\ln(1-\gamma)}; +\infty[
\end{aligned}$$

(g) On en déduit le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\ln(1-\gamma)}$		0		$\sqrt{-\ln(1-\gamma)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

4. (a) On considère la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} + x^2 - 1$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et $h'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2x = 2x(1 - \mathrm{e}^{-x^2})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ donc $-x^2 \leq 0$, $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$ et ainsi $1 - \mathrm{e}^{-x^2} \geq 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	$h(0) = 0$	$\nearrow$	

et on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$. Ainsi, on en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2} \geq 1 - x^2$.

(b) On pose $k(x) = \mathrm{e}^{-x^2} - 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$ et on étudie les variations de k.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} k'(x) &= -2x\,\mathrm{e}^{-x^2} + 2x - 2x^3 \\ &= 2x(1 - \mathrm{e}^{-x^2} - x^2) \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $1 - \mathrm{e}^{-x^2} - x^2 \leq 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
k		$\nearrow$	$k(0) = 0$	$\searrow$	

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) \leq 0$ d'où l'inégalité $\mathrm{e}^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$.

(c) On se sert de l'inégalité précédente pour déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x^2} &\leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} \\ -\mathrm{e}^{-x^2} &\geq -1 + x^2 - \frac{x^4}{2} \\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2} &\geq x^2 - \frac{x^4}{2} \\ \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) &\geq \ln\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) && \text{car la fonction ln est strictement croissante sur }]0, +\infty[\\ f(x) &\geq x \ln\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) && \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

De plus, pour $x > 0$ on a $1 - \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$ donc $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \leq 0$, et ainsi, $f(x) \leq 0$.

On en déduit l'encadrement suivant, valable sur $]0, +\infty[$:

$$x \ln\left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) \leq f(x) \leq 0$$

Or,

$$\begin{aligned} x\ln\left(x^2-\frac{x^4}{2}\right) &= x\ln\left(x^2\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right) \\ &= x\ln x^2 + x\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= 2x\ln x + x\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

par croissance comparée et par opérations sur les limites, on en conclut que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(x^2-\frac{x^2}{4}\right)=0$.
Ainsi, en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$.De plus, f étant impaire, on en conclut qu'on a également $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0$. Finalement, la fonction $\hat{f}$ définie par :

$$\hat{f}(x)=\left\{\begin{array}{cl} f(x) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{array}\right.$$

prolonge f par continuité en 0.

Exercice 2

1. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=-\infty$ donc par produit et par composition par exp qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)=+\infty}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc par produit et composition on a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$$

2. (a) h est somme de la fonction $x\mapsto \ln(x)$ et de la fonction $x\mapsto 2x-1$, toutes deux strictement croissantes donc $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

   (b) h est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues, et strictement croissante d'après la question précédente.
   Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ donc $0\in]\lim\limits_{x\to 0} h(x), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[$.

   > D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un unique réel $\alpha>0$ tel que $h(\alpha)=0$. De plus, $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)<0$ et $h(1)=1>0$, donc α appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

   (c) Comme $h(\alpha)=0$ on a $\ln(\alpha)=1-2\alpha$ donc :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \exp\left(\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)(1-2\alpha)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-(2\alpha-1)^2}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

   (d) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit et composition de fonctions usuelles dérivables. De plus, pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\right)\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\ &= \left(\frac{\ln(x)+2x-1}{x^2}\right)g(x) \\ &= \frac{1}{x^2}h(x)g(x) \end{aligned}$$

(e) g est strictement positive sur $]0,+\infty[$ par propriété de la fonction exp, et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$.
h est strictement croissante et s'annule en α, donc strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} g(x) - x^2 &= \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - \exp(2\ln(x)) \\ &= \exp(2\ln(x))\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}-1\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\exp(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-\ln(x)}{x}\right) = 0$ par croissance comparée, donc

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(x)}{x}$$

d'où par produit

$$\boxed{g(x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \times \left(\frac{-\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x)}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ »
$\mathcal{P}(0)$ est vrai par hypothèse, et si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}$ alors $g(u_n)$ est bien défini car g est définie sur $]0,+\infty[$, et $g(u_n) > 0$ par propriété de la fonction exp, donc $u_{n+1} = g(u_n)$ existe et $u_{n+1} > 0$. Par récurrence on en conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Par tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln(x)$		$+$	0	$+$	

donc $\boxed{\forall x > 0,\ (x-1)\ln(x) \geq 0}$

(b) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{x} &= \frac{g(x)}{e^{\ln(x)}} \\ &= g(x)\exp(-\ln(x)) \\ &= \exp\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $(x-1)\ln(x) \geq 0$ donc $\frac{(x-1)\ln(x)}{x} \geq 0$ donc $\boxed{\exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right) \geq 1}$.

(c) On déduit de la question précédente que pour tout $x > 0$, $g(x) \geq x$ par produit, avec égalité si et seulement si $x = 1$ d'où le résultat.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n \geq 0$ d'après la question 5.c. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$

7. (a) On montre le résultat par récurrence. Il est vrai pour $n = 0$ par hypothèse de cette question.
Supposons que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour un certain entier n. Alors $g(u_n) \leq g(1)$. Or $g(1) = 1$ donc $u_{n+1} \leq 1$. De plus (u_n) est croissante donc

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

(b) (u_n) est croissante d'après la question 6 et majorée par 1 d'après la question 7.a donc (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.
g est continue sur $]0, +\infty[$ donc $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ donc par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = g(u_n)$ on obtient $\ell = g(\ell)$.
$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } g(x) = x \text{ est 1 d'après la question 5.c donc } \ell = 1.}$

8. (u_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 > 1$ (*).
(u_n) est croissante donc soit elle converge soit elle tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que (u_n) converge vers un réel ℓ. Alors, comme dans la question 7.b., la seule valeur possible de ℓ est $\ell = 1$. Par passage à la limité dans l'inégalité (*) on obtient $\ell \geq u_0 > 1$, contradiction. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9. La fonction g est strictement décroissante sur $]0, \alpha[$. Si $0 < u_0 < \frac{1}{2} < \alpha$ alors $g(u_0) > g\left(\frac{1}{2}\right)$. Or $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ donc $u_1 > 1$.
$\boxed{\text{En reprenant le même raisonnement que dans la question précédente on obtient } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ donc } (u_n) \text{ diverge.}}$

Exercice 3

1. (a) On a $\deg(P''(x)) = p - 2$ et $\deg((x^2+1)P''(x)) = \deg(x^2+1) + \deg(P''(x)) = 2 + p - 2 = p$.
De même, $\deg(4P'(x)) = p - 1$ et $\deg(-2P(x))) = p$ donc par somme de polynômes, $\deg(Q(x)) \leq p$ avec égalité si et seulement si le coefficient de degré p est non nul.
Posons $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ un polynôme de degré p avec $p \neq 2$. Alors $a_p \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$Q(x) = (x^2+1)\sum_{k=2}^{p} k(k-1)a_k x^{k-2} + 4\sum_{k=1}^{p} k a_k x^{k-1} - 2\sum_{k=0}^{p} a_k x^k \quad = \sum_{k=2}^{p} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=2}^{p} k(k-1)x^{k-2} + 4\sum_{k=1}^{p} k a_k x^k$$

Le terme de degré p de cette expression est $p(p-1)a_p x^p - 2a_p x^p$. Le coefficient de degré p est nul si et seulement si $(p(p-1)-2)a_p = 0$, si et seulement si $p^2 - p - 2 = 0$, si et seulement si $p = 2$ (car l'autre solution est strictement négative).
On a donc montré que Q est de degré p sauf lorsque $p = 2$ auquel cas $\deg(Q) < p$.

(b) Par disjonction de cas, on a soit $p \neq 2$ et $\deg(Q) = p \neq 2$, soit $p = 2$ et $\deg(Q) < 2$. Dans tous les cas $\deg(Q) \neq 2$.

2. (a) Si P est non nul et satisfait l'égalité (1), alors $\deg(P) \geq 0$ et $Q(x) = 0$ donc $\deg(Q) = -\infty$, donc $\deg(Q) < \deg(P)$.
D'après la question 1.a, le seul cas possible est $\deg(P) = 2$.

(b) Soient a, b, c trois coefficients réels et P la fonction polynômiale définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors P satisfait l'équation (1) si et seulement si

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1)2a + 4(2ax+b) - 2(ax^2+bx+c) = 0\big) \iff \big(\forall \in \mathbb{R}, \quad (2a-2a)x^2 + (8a-2b)x + (2a+4b-2c) = 0$$

Or une fonction polynôme est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc $8a-2b = 0$ et $2a+4b-2c = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8a-2b & = & 0 \\ 2a+4b-2c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 4a \\ c & = & 9a \end{array} \right.$$

donc P est solution si et seulement si $b = 4a$ et $c = 9a$, c'est à dire si et seulement si P est de la forme $P(x) = ax^2 + 4ax + 9a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

3. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$ et P la fonction polynômiale définie par $P(x) = ax + b$.

$$\begin{aligned} P \text{ est solution de (2)} &\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2+1) \times 0 + 4a - 2(ax+b) = x\big) \\ &\iff \big(\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-2a-1)x + 4a - 2b = 0\big) \\ &\iff a = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -1 \end{aligned}$$

donc la fonction définie par $P(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ est solution de (2).

(b) Soit P un polynôme quelconque. Notons Q et Q_1 les polynômes définis comme à la question 1 par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = (x^2+1)P''(x) + 4P'(x) - 2P(x)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_1(x) = (x^2+1)P_1''(x) + 4P_1'(x) - 2P_1(x)$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (Q-Q_1)(x) = (x^2+1)(P-P_1)''(x) + 4(P-P_1)'(x) - 2(P-P_1)(x)$$

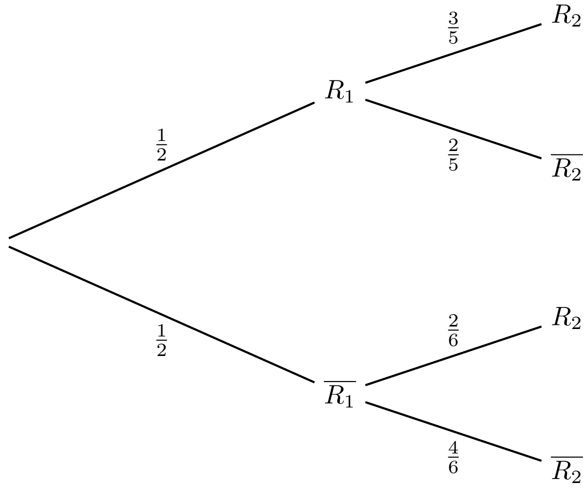
$$\begin{aligned} P \text{ est solution de (2)} &\text{si et seulement si : } \forall x \in \mathbb{R}, \ Q(x) = x \\ &\text{si et seulement si : } \forall x \in \mathbb{R}, \ Q(x) = Q_1(x) \qquad \text{car } P_1 \text{ est solution de (2)} \\ &\text{si et seulement si } \forall x \in \mathbb{R}, \ (Q(x) - Q_1(x)) = 0 \\ &\text{si et seulement si } P - P_1 \text{ est solution de (1)} \end{aligned}$$

(c) D'après la question 2.b, $P - P_1$ est solution de (1) si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(P - P_1)(x) = ax^2 + 4ax + 9a$.
On en déduit d'après la question précédente que P est solution de (2) si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = P_1(x) + ax^2 + 4ax + 9a$, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \left(a - \frac{1}{2}\right) x^2 + (4a-1)x + 9a$$

Exercice 4

1. $\mathbb{P}(R_1)$ est la probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage. C'est une situation d'équiprobabilité donc $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{\text{card}(R_1)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
2. On peut représenter la situation par un arbre



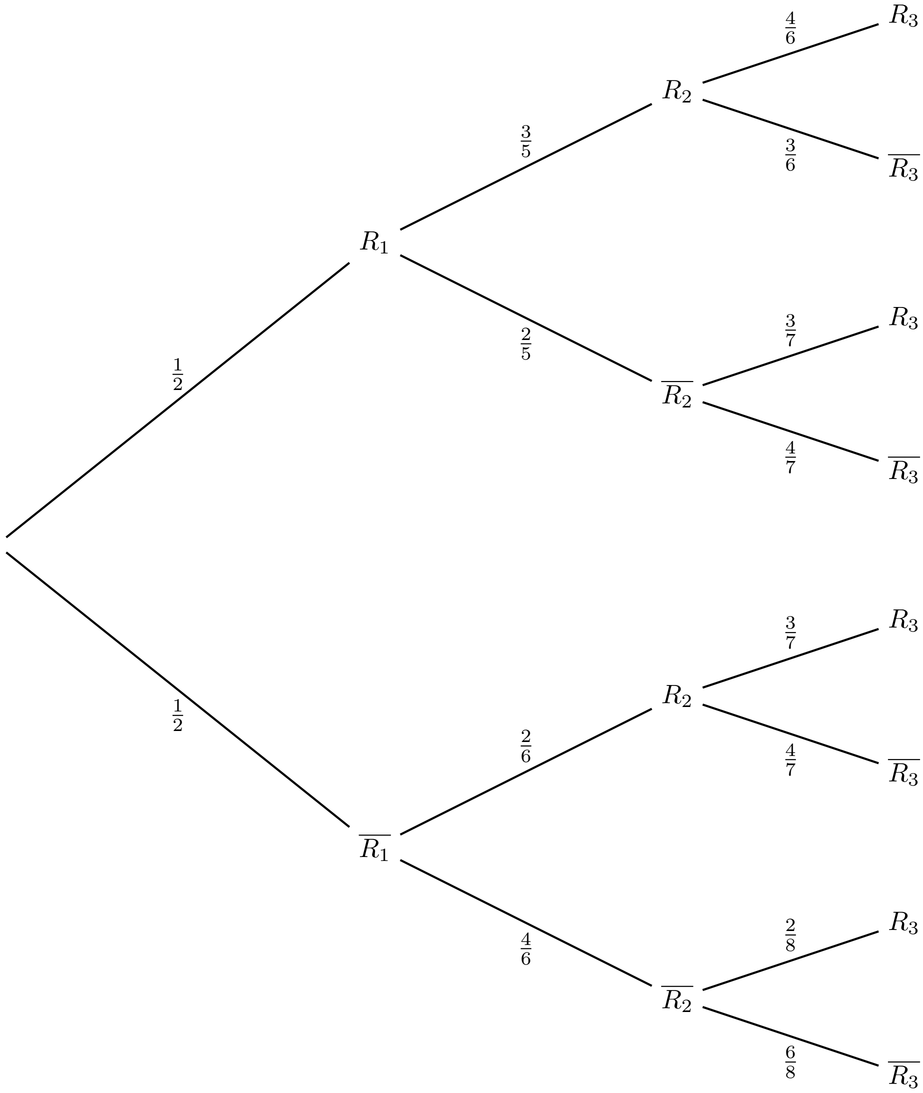
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(\overline{R_1} \cap R_2) \\
&= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) + \mathbb{P}(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(R_2) && \text{d'après la formule des probabilités composées} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \\
&= \frac{7}{15}
\end{aligned}$$

3. Il faut calculer $\mathbb{P}_{R_2}(R_1)$.
   On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{R_2}(R_1) &= \frac{\mathbb{P}(R_2 \cap R_1)}{\mathbb{P}(R_2)} && \text{par définition} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}}{\frac{7}{15}} \\
&= \frac{9}{14}
\end{aligned}$$

4. On représente la situation par un arbre :



On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_3) &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{8}\\
&= \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{3}{35}}_{\frac{7}{35}+\frac{3}{35}=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}} +\frac{1}{14}+\frac{1}{12}\\
&= \frac{2}{7}+\frac{1}{2\times 7}+\frac{1}{2\times 6}\\
&= \frac{24}{7\times 2\times 6}+\frac{6}{2\times 7\times 6}+\frac{7}{2\times 6\times 7}\\
&= \frac{37}{84}
\end{aligned}$$

5. $B_n = R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{n-1}\cap\overline{R_n} = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} R_k\right)\cap\overline{R_n}$

6. *Méthode 1 :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{2}{\cancel{4}} \times \frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{4}}{6} \times \frac{\cancel{5}}{7} \cdots \times \frac{\cancel{n}}{n+2} \times \frac{\cancel{n+1}}{n+3} \\ &= \frac{6}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

Méthode 2 : par récurrence, on pose $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}(R_1 \cap \mathbb{R}_2 \cap \cdots \cap R_n) = \dfrac{6}{(n+2)(n+3)}$.

- **Initialisation :** $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{6}{(1+2)(1+3)} = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain rang n.
  Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n+1}) &= \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_n}(R_{n+1}) && \text{formule des probabilités composées} \\ &= \frac{6}{(n+2)(n+3)} \times \frac{n+2}{n+4} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{6}{(n+3)(n+4)}\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  si les n premières boules tirées sont rouges, alors il y a $n+2$ boules rouges dans l'urne et $n+4$ boules en tout, donc pour le $n+1$-ième tirage la probabilité de tirer une boule rouge est $\dfrac{n+2}{n+4}$
- **Conclusion :** On en conclut par principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_n) = \dfrac{6}{(n+2)(n+3)}$.

7. $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap \overline{R_n})$ d'après la question 5.
   Ainsi

$$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}}(\overline{R_n})$$

   Si les $n-1$ premières boules tirées sont rouges, alors il y aura 2 boules noires sur un total de $n+3$ boules dans l'urne.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1}) \times \frac{2}{n+3} \\ &= \frac{6}{(n+1)(n+2)} \times \frac{2}{n+3} && \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

8. (a) Soient a, b et c trois réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3} &= \frac{a(n+2)(n+3) + b(n+1)(n+3) + c(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{n^2(a+b+c) + n(5a+4b+3c) + 6a+3b+2c}{(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

   Ainsi, a, b et c sont solutions du problème posé si $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 5a+4b+3c=0 \\ 6a+3b+2c=12 \end{cases}$

   On résout ce système :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 5a+4b+3c=0 \\ 6a+3b+2c=12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+2c=0 \\ 3b+4c=12 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+2c=0 \\ b=12 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-12 \\ c=6 \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{6}{n+1} - \frac{12}{n+2} + \frac{6}{n+3}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = & \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{k+1} - \frac{12}{k+2} + \frac{6}{k+3} \right) \\
= & \frac{6}{2} - \frac{12}{3} + \cancel{\frac{6}{4}} \\
& \frac{6}{3} - \cancel{\frac{12}{4}} + \cancel{\frac{6}{5}} \\
& \cancel{\frac{6}{4}} - \cancel{\frac{12}{5}} + \cancel{\frac{6}{6}} \\
& \vdots \\
& \cancel{\frac{6}{n}} - \cancel{\frac{12}{n+1}} + \frac{6}{n+2} \\
& \cancel{\frac{6}{n+1}} - \frac{12}{n+2} + \frac{6}{n+3} \\
& = 1 + \frac{6}{n+3} - \frac{6}{n+2}
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = 1$ par opérations.
Une démonstration plus rigoureuse de l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{k+2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k+3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{12}{k+1} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{6}{k+1} \\
&= \frac{6}{1+1} + \frac{6}{2+1} - \frac{12}{2+1} - \frac{12}{n+1+1} + \frac{6}{n+2+1} + \frac{6}{n+1+1} + \sum_{k=3}^{n} \left(\underbrace{\frac{6}{k+1} - \frac{12}{k+1} + \frac{6}{k+1}}_{=0} \right) \\
&= 1 + \frac{6}{n+3} - \frac{6}{n+2}
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$ car il s'agit d'une union d'événements deux à deux incompatibles.

Or d'après le résultat admis, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = 1$ d'après la question précédente.

Ainsi, on en conclut que la probabilité de tirer au moins une boule noire est de 1 (cet événement est presque sûr).